3-7. 状態の時間変化とSchrödinger方程式（ケット版）

ある系(system)の状態を$|\Psi>$だとしよう。一般には、時間とともにその状態は変化する。そこで、「時刻tの状態」という意味で$|\Psi>$を$|\Psi(t)>$と書くことにしよう。この節では、状態ケット$|\Psi(t)>$が時間とともにどう変化するか、そのルールについて調べる[1]。

3-7-1. 時間発展演算子

記述を簡単にするために、最初の時刻を0、その後の時刻をtとする[2]。時刻0で系の状態は$|\Psi(0)>$で時刻tでは$|\Psi(t)>$とする。

$$|\Psi(0)> \to |\Psi(t)> \quad \text{（時間的発展）} \qquad (3.7.1)$$

ここで、$|\Psi(t)>$は$|\Psi(0)>$に、「ある演算子を作用させる」ことで求まるものとしよう。すなわち、この演算子は、ある状態に時間幅 t の時間的発展の作用をすると考える。この「時間発展演算子」を$\hat{U}(t)$と書けば、

$$|\Psi(t)> = \hat{U}(t)|\Psi(0)> \qquad (3.7.2)$$

と記述できる。

この時、 式(3.7.2)の $\hat{U}(t)$ にはどのような条件が課されるであろうか。

$|\Psi(0)>$では、ある物理量を観測した場合、その対応する演算子の固有状態のどれかが観測されるのであるが、観測される確率を全て足し合わせた全確率は１になっているとする。このためには、$|\Psi(0)>$は<u>規格化されている必要がある</u>（演習）[3]。当然、時刻 t になっても全確率は１になっていることが要求される（<u>確率保存の条件</u>）ので、$|\Psi(0)>$は時間が経過しても規格化されたままでなければならないだろう。

$$<\Psi(0)|\Psi(0)> = 1 \ \to <\Psi(t)|\Psi(t)> = 1 \qquad (3.7.3)$$

これを満たすためには、$\hat{U}(t)$はユニタリー演算子であることが要請される。
すなわち、

$$<\Psi(t)|\Psi(t)> = <\Psi(0)|\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)|\Psi(0)> = 1 \qquad (3.7.4)$$

とならねばいけないので、ユニタリー性の条件、

$$\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = \hat{I} \qquad (3.7.5)$$

が要求される。

---

[1] ここで述べるのは「Schrödinger表示」と呼ばれる定式化である。これに対して、物理量に対応する演算子の方が時間変化する、という定式化もある。これは「Heisenberg表示」と呼ばれる。この講義では主にSchrödinger表示について扱う。

[2] 最初の時刻をt_0, その後の時刻をtと書く方が、より一般的であるが、ここではt_0を0と選んだ。

[3] 演習３（３）でスピンの場合については成り立っていた。一般の場合についても成り立つことはすぐに示せる（演習）

3-7-2. 無限小の時間発展

無限小の時間幅 ε の積み重ねで有限の時間変化が起こる、と考える。

まず、無限小の時間幅 ε に対しても$\hat{U}(\varepsilon)$はユニタリー性を持つとする。

$$\hat{U}^\dagger(\varepsilon)\hat{U}(\varepsilon) = \hat{I} \tag{3.7.6}$$

また、$\varepsilon \to 0$ の極限では、状態は何も変化しないのであるから、$\hat{U}(\varepsilon) \to \hat{I}$ （恒等演算子）になる。時間は連続なパラメータと考えられるから、ε が非常に小さい時には、次の式のように、$\hat{U}(\varepsilon)$ は恒等演算子とε 程度の違いになると考えられる。

$$\hat{U}(\varepsilon) = \hat{I} + \varepsilon\hat{\Omega}'$$

ここで後のことを考え、演算子 $\hat{\Omega}' = -i\hat{\Omega}$ とおくと、

$$\hat{U}(\varepsilon) = \hat{I} - i\varepsilon\hat{\Omega} \tag{3.7.7}$$

ただし、$\hat{\Omega}$はエルミート演算子にとる必要がある。この理由は、 $\hat{U}(\varepsilon)$ のユニタリー性を保証したいからである。

（証明）$\hat{\Omega}$がエルミート演算子とすると $\hat{\Omega}^\dagger = \hat{\Omega}$. ε は時間なので実数とし $\hat{U}(\varepsilon)$のエルミート共役を作ると、

$$\hat{U}^\dagger(\varepsilon) = \hat{I}^\dagger - (-i)\varepsilon^*\hat{\Omega}^\dagger = \hat{I} + i\varepsilon\hat{\Omega} \tag{3.7.8}$$

となる（$\hat{I}^\dagger = \hat{I}$ に注意）。ε^2 以上の項を無視すると、$\hat{U}^\dagger(\varepsilon)\hat{U}(\varepsilon) = (\hat{I} + i\varepsilon\hat{\Omega})(\hat{I} - i\varepsilon\hat{\Omega}) = \hat{I}^2 + i\varepsilon\hat{\Omega}\hat{I} - i\varepsilon\hat{I}\hat{\Omega} + \varepsilon^2\hat{\Omega}^2 \simeq \hat{I}$ であるから $\hat{U}(\varepsilon)$ はユニタリー演算子の性質を持つ。（もし、 $\hat{\Omega}^\dagger \neq \hat{\Omega}$ ならば、この式は成り立たない。）

さて、$\hat{\Omega}$に何を選べば良いだろうか。まず、 $\hat{\Omega}$ はエルミート演算子なので「何らかの観測可能な物理量」に対応する、と考えて良いだろう。ただし、(3.7.7)式から分かるように「$\varepsilon\hat{\Omega}$」は$\hat{I}$や$\hat{U}$ のように無次元にならねばならぬ。ε は時間なので $\hat{\Omega}$ に対応する物理量は時間の逆数の次元を持つはずである。

ここで、解析力学（古典力学）の考え方を参考にしよう（後で示すように、量子力学と解析力学は密接な関係がある）。解析力学では、ハミルトン形式の無限小の正準変換[4]において、ハミルトニアンは時間発展の生成子であった。[5] それにならって、$\hat{\Omega}$ をハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ に

---

[4] 変数変換によって一般にハミルトニアンの形は変わるが、Hamilton（ハミルトン）の正準運動方程式の形が形式的に変わらないような変換.

[5] 解析力学の教科書、あるいは、十河　清「解析力学と交換子」数理科学 No.576, June (2011)などを見よ。後者の記事はネットの検索によって本人のサイトからpdfが手に入る。 解析力学と量子力学は、多くの点で関連している。例えば、Poisson（ポアソン）括弧が量子力学での交換子に対応している（後の節で述べる）

関係づけることにする。Einsteinの関係式 $E=\hbar\omega$ から、時間の逆数を持つのは $\omega=E/\hbar$ （次元は J/(J・s)=1/s） なので、

$$\hat{\Omega}=\frac{\hat{H}}{\hbar} \tag{3.7.9}$$

とおくのが良いと思われる。実際、このように取るとうまく行くことが後の節で示される。

結局、無限小の時間発展演算子は

$$\hat{U}(\varepsilon)=\hat{I}-\frac{i\varepsilon\hat{H}}{\hbar} \tag{3.7.10}$$

と書ける。

3-7-3. 時間に依存したSchrödinger方程式（ケット版）

(3.7.10)を使うと、状態ケット $|\Psi(t)>$ に対する時間発展の微分方程式を導ける。

無限小の時間での変化は、

$$|\Psi(\varepsilon)>=\left(\hat{I}-\frac{i\varepsilon\hat{H}}{\hbar}\right)|\Psi(0)> \tag{3.7.11}$$

となるが、この式を書き換えると[6]、

$$\frac{|\Psi(\varepsilon)>-|\Psi(0)>}{\varepsilon}=\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right)|\Psi(0)> \tag{3.7.12}$$

となる。通常の関数のように、ケットベクトルにおいても $\varepsilon\to 0$ の極限を取ると(3.7.12)の左辺は導関数の定義になると考えて、

$$\frac{\partial|\Psi>}{\partial t}=\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right)|\Psi>\ . \tag{3.7.13}$$

この式 (3.7.13)は、t = 0 に限らず、どの時刻 t においても成り立つであろうから、

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi(t)>}{\partial t}=\hat{H}|\Psi(t)> \tag{3.7.14}$$

が得られる（(3.7.13)の両辺に $i\hbar$ をかけて変形してある）。

---

[6] 括弧を外して、恒等演算子と|Ψ(0)>の積を左辺に移行。その後、両辺を ε で割る。

これを、**時間に依存した（ケット版の）Schrödinger方程式**と呼ぶ。この式の形は、すでに波動関数に対して導出したSchrödinger方程式(2-2-10)とよく似た形（ケットを取り去れば同じ形）をしている。状態ベクトル$|\Psi(t)>$と波動関数 $\Psi(t)$ の関係について述べるには、先に「連続固有値をとる観測可能な物理量（例えば位置、運動量など）のベクトル空間」について議論する必要がある。なので、これは後で詳しく述べる。

3-7-4. 有限時間間隔 t の時間発展演算子

無限小の時間間隔では、$\hat{U}(\varepsilon)=\hat{I}-i\dfrac{\varepsilon}{\hbar}\hat{H}$ と書けたが、次に、有限時間間隔 t での $\hat{U}(t)$ の具体的な形を求める。

$|\Psi(t)>=\hat{U}(t)|\Psi(0)>$ をケット版の時間に依存したSchrödinger方程式 (3.7.14)

$i\hbar\dfrac{\partial|\Psi(t)>}{\partial t}=\hat{H}|\Psi(t)>$ に代入すると、$\left(i\hbar\dfrac{\partial|\hat{U}(t)>}{\partial t}-\hat{H}\hat{U}(t)>\right)|\hat{\Psi(0)}>=0$ となるので、

$$i\hbar\frac{\partial\hat{U}(t)}{\partial t}=\hat{H}\hat{U}(t) \qquad (3.7.15)$$

が得られる。この式を、<u>時間発展演算子に対するSchrödinger方程式</u>と呼ぶことがある。

$\hat{H}$ が時間によらない場合、 (3.7.15)をみたす解は、

$$\hat{U}(t)=e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}\left(\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\hat{H}t/\hbar)^n}{n!}\right) \qquad (3.7.16)$$

となる。ここで、「演算子 $\hat{M}$ の指数関数」$e^{\hat{M}}$ なるものは、次の式で定義されている。

$$e^{\hat{M}}\equiv 1+\hat{M}+\frac{\hat{M}^2}{2!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\hat{M})^n}{n!} \qquad (3.7.17)$$

ここで、$\hat{M}=-i\dfrac{\hat{H}}{\hbar}$ とおけばこれは (3.7.16)になる。(3.7.16)式の最右辺の展開式をtで微分し、(3.7.15)の右辺を $i\hbar$ で割ったものを比べることにより、(3.7.16)は(3.7.15)を満たすことが分かる[7]。

無限小の時間間隔の場合は、(3.7.16)の t の１次の項まで取り、$\hat{U}(\varepsilon)=\hat{I}-i\dfrac{\varepsilon}{\hbar}\hat{H}$ とした事に相当する。

なお、(3.7.16)式の $\hat{U}(t)$ はユニタリー演算子であることを示せる。[8]

---

[7] このことから、展開式を使わなくとも、**普通の指数関数と同じように形式的に微分しても良い**ことがわかる。

[8] 演習

3-7-5. 時間に依存しないSchrödinger方程式

ハミルトニアン演算子$\hat{H}$ はエネルギーに対応したエルミート演算子なので、ある状態でエネルギーを観測すると、状態は$\hat{H}$ の固有状態のどれか（例えば、$|E_j>$ ）になり、その観測値はその固有状態に対応した固有値（ E_j ）になる。ここで、次の固有値方程式が成り立つ。

$$\hat{H}|E_j> = E_j|E_j> \qquad (3.7.18)$$

この式は、**<u>時間に依存しない（ケット版の）Schrödinger方程式</u>**とも呼ばれる。

この式から求められた$\hat{H}$ の固有状態のセット $\{|E_j>\}$は正規直交基底を張るので、任意の状態ケット$|\Psi(t)>$ は、その基底$\{|E_j>\}$で次のように展開できる。

$$|\Psi(t)> = \sum_j \alpha_j(t)|E_j> \qquad (3.7.19)$$

<u>基底ベクトル $\{|E_j>\}$自体は時間変化しない表示を考えているので、状態ケットの時間変化は、係数の時間変化 $\alpha_j(t)$ により生じる。</u>

ここで、(3.7.19)式で t=0とした $|\Psi(0)> = \sum_j \alpha_j(0)|E_j>$ に(3.7.16)の $\hat{U}(t)$を作用させると、

$$|\Psi(t)> = \hat{U}(t)|\Psi(0)> = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\sum_j \alpha_j(0)\ |E_j> = \sum_j \alpha_j(0)\ e^{-\frac{i}{\hbar}E_j t}|E_j> \qquad (3.7.20)$$

が得られる。ここで、<u>指数関数の肩に$\hat{H}$があっても、$\hat{H}|E_j> = E_j|E_j>$ を使って(3.7.20)式の最右辺のように書ける</u>ことに注意。（これは、(3.7.16)の展開式を使えば証明できる。）よって、(3.7.19）式の$\alpha_j(t)$は、

$$\alpha_j(t) = \alpha_j(0)\ e^{-\frac{i}{\hbar}E_j t} \qquad (3.7.21)$$

と、求まる。結局、時間に依存したSchrödinger方程式 (3.7.14)の解は(3.7.20)式となる。

(3.7.20)式は形式的な解であるが、具体的な問題では、状態の時間変化は以下のステップで求めることになる。
[1] 考えている系のハミルトニアンを作る
[2] その固有状態$\{|E_j>\}$と固有値$\{E_j\}$を、時間に依存しないSchrödinger方程式 (3.7.18)で求める
[3] 式(3.7.20)に代入し、時間に依存したSchrödinger方程式 (3.7.14)の一般解を求める。
実際の問題への適用法は、あらためて後の章で述べることにする。

以下に、式(3.7.14)の形式解を求める別の方法を示す。
式 (3.7.19)を時間に依存したSchrödinger方程式 (3.7.14) に代入して変形する。

$$i\hbar\frac{\partial(\sum_j \alpha_j(t)|E_j>)}{\partial t} = \hat{H}(\sum_j \alpha_j(t)|E_j>) \qquad (3.7.22)$$

ここで、式(3.7.18)を使うと、

$$i\hbar\sum_j \frac{d\alpha_j(t)}{dt}|E_j> = \sum_j E_j\alpha_j(t)|E_j> \qquad (3.7.23)$$

これをまとめると、

$$\sum_j \left(i\hbar \frac{d\alpha_j(t)}{dt} - E_j\alpha_j(t) \right) | E_j > = 0 \qquad (3.7.24)$$

式(3.7.24)が常に成り立つためには、すべての j について左辺の括弧の中がゼロであれば良い。すなわち、

$$\frac{d\alpha_j(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} E_j \alpha_j(t) \qquad (3.7.25)$$

これは、すぐに解けて、 $\alpha_j(t) = \alpha_j(0)\ e^{-\frac{i}{\hbar}E_j t}$ (3.7.26)

となる。ここで、$\alpha_j(0)$ はt=0の時の係数の値である。すなわち、式(3.7.19)より、

$$\alpha_j(0) = < E_j | \Psi(0) > \qquad (3.7.27)$$

と書ける。式(3.7.26)は式 (3.7.21)と同じ結果となる。

3-7-6. 期待値の時間変化

状態が時間変化して行くと、観測結果の期待値（平均値）も時間変化して行く。この節では、この時間変化の表式を求めてみる。そこには交換子が現れ、解析力学（古典力学）のPoisson括弧を使った式とよく似た式となる。

今、状態 $|\Psi(t)>$ において、観測可能な物理量 M の観測結果の期待値は、

$$< \hat{M} >_t = < \Psi(t) | \hat{M} | \Psi(t) > \qquad (3.7.28)$$

である。ここで、期待値 $< \hat{M} >_t$ の添え字の t は本来、 $< \hat{M} >_{\Psi(t)}$ と書くべきところを省略した。

この時間変化は、

$$\frac{d}{dt} < \hat{M} >_t = < \dot{\Psi}(t) | \hat{M} | \Psi(t) > + < \Psi(t) | \hat{M} | \dot{\Psi}(t) > \qquad (3.7.29)$$

ここで、ブラやケットの上のドットは時間微分を表している[9]。この式に、時間に依存したSchrödinger方程式 (3.7.14)のケット版、ブラ版、

$$|\dot{\Psi}(t)> = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\Psi(t)> \ , \qquad <\dot{\Psi}(t)| = \frac{i}{\hbar}<\Psi(t)|\hat{H} \qquad (3.7.30)$$

を代入する（ $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ を使った）。

その結果、 式(3.7.29)は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} < \hat{M} >_t &= \frac{i}{\hbar} < \Psi(t) | \hat{H}\hat{M} | \Psi(t) > - \frac{i}{\hbar} < \Psi(t) | \hat{M}\hat{H} | \Psi(t) > \qquad (3.7.31) \\ &= \frac{i}{\hbar} < \Psi(t) | (\hat{H}\hat{M} - \hat{M}\hat{H}) | \Psi(t) > \\ &= \frac{i}{\hbar} < \Psi(t) | [\hat{H}, \hat{M}] | \Psi(t) > \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\frac{d}{dt} < \hat{M} >_t = -\frac{i}{\hbar} < [\hat{M}, \hat{H}] >_t \qquad (3.7.32)$$

この結果は、期待値の時間変化が、その演算子とハミルトニアンの交換子の期待値で書けることを示している。

[9] Schrödinger表示では、物理量を表す演算子は時間変化しないとしている。

3-7-7. 観測可能な物理量が保存する条件

量子力学では、ある量（例えば、M）が保存されることは、その**期待値が時間変化しない**ことを意味する。

この条件は、式(3.7.32)より、「その量に対応する演算子（$\hat{M}$）がハミルトニアン$\hat{H}$と交換する」、ということであることがわかる。すなわち、

$< \hat{M} >_t$ が時間変化しない（保存する）条件 $\rightarrow$ $[\hat{M}, \hat{H}] = 0$ (3.7.33)

$\hat{M}$ として、ハミルトニアン $\hat{H}$ そのものをとると、

$$[\hat{H}, \hat{H}] = 0 \tag{3.7.34}$$

は常に成り立つので、Hの期待値（**エネルギーの期待値**）は保存する。これはエネルギー保存を量子力学で一般的に表現したものである。

3-7-8. 古典力学との対応関係[10]

ここで、式 (3.7.32)を解析力学におけるPoisson括弧を使った表現と比べると興味深い。

解析力学（古典力学）のハミルトン形式では、ある物理量 M は位置 q と運動量 p の関数 $M(q,p)$ として書ける。この時、M の時間変化は、

$$\frac{dM}{dt} = \{M, H\}_{PB} \tag{3.7.35}$$

となる。式(3.7.34) の右辺のPoisson（ポアソン）括弧 (PB) は、以下の式、

$$\{M, N\}_{PB} \equiv \frac{\partial M}{\partial q}\frac{\partial N}{\partial p} - \frac{\partial N}{\partial q}\frac{\partial M}{\partial p} \tag{3.7.36}$$

で定義されるので、(3.7.35) の N をハミルトニアン H で置き換え、ハミルトンの正準方程式

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{3.7.37}$$

を使えば、(3.7.35) が導ける。

量子力学の式 (3.7.32) と古典力学の式 (3.7.35)を比べると、次のような対応関係

（量子力学） $[\hat{M}, \hat{H}]$ $\rightarrow$ $i\hbar\{M, H\}_{PB}$ （古典力学） (3.7.38)

があることがわかる。[11]

---

[10] 講義補足

[11] このような関係を最初に指摘したのは、Diracである。

演習7

1. 状態$|A>$で、ある観測可能な物理量Mを測定した場合、その対応する演算子$\hat{M}$の固有状態$\{|\lambda_i>\}$のどれかが観測されるのであるが、それぞれの観測される確率をすべて足し合わせた全確率が１になるためには、$|A>$は規格化されている必要があることを示せ。

2. $\hat{U}(t)=e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$の時、$\hat{U}^\dagger(t)$ を求め、$\hat{U}(t)$がユニタリー演算子であることを示せ。

3. 有限時間の時間発展演算子　$\hat{U}(t)=e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$　(3.7.16)式を使いスピン状態の時間変化に関する問題を解いてみよう。
今、z軸方向に向いた一様な静磁場(B_z)中に１つの電子スピンがあったとする。電子スピンは磁気モーメントを持つので、$\sigma_z=+1$の時（磁場にスピンが平行の時）はエネルギーE が高く、$\sigma_z=-1$の時（磁場にスピンが反平行の時）はEが低くなる。また、Eは磁場の大きさにも比例するので、電子スピンのエネルギーに対応する演算子、ハミルトニアン$\hat{H}$ は B_z と $\hat{\sigma}_z$ の積（B_z は $\hat{\sigma}_z$ にかかるただの数となる）で書ける。すなわち、

$$\hat{H}\propto B_z\hat{\sigma}_z.$$

この時、比例定数とB_zの積を、後で式が見やすくなるように$\frac{\hbar}{2}\omega$ と書くことにすると、$\hat{H}$は次のようになる。

$$\hat{H}=\frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z \qquad (3.7.38)$$

以下の問いに答えよ。

(1) $\hat{\sigma}_z$ の固有状態はハミルトニアン$\hat{H}$ (3.7.38)の同時固有状態（σ_zもEも同時に正確に決めることができる状態）であることを確かめよ。また、$\hat{H}$の固有値を求めなさい。

(2) スピンの初期状態が $|\Psi(0)>=\alpha_u|u>+\alpha_d|d>$ の時、時刻tでの状態、$|\Psi(t)>$ を求めよ。

(3) 初期状態が $\sigma_z=+1$ (すなわち、$|u>$) の時、時刻tにおけるスピンのz成分の期待値 $<\hat{\sigma}_z>_t$ を求めよ。

(4) 初期状態が $\sigma_x=+1$ (すなわち、$|r>$) の時、時刻tでの状態、$|\Psi(t)>$ を求めよ。

(5) (4)の$|\Psi(t)>$ で σ_x を観測したところ、$\sigma_x=+1$ か　$\sigma_x=-1$ の測定結果が得られた。それぞれの観測される確率を求めよ。

(6) (4)の$|\Psi(t)>$ での期待値 $<\sigma_x>_t$, $<\sigma_y>_t$, $<\sigma_z>_t$ を求めよ。

(7) (6)の結果は、古典的にはスピンがどのような運動をしている事に対応するのか、述べよ[12]。

---

[12] 量子力学では期待値が運動するのであって、実際の観測値は固有値だけになる。期待値が古典的な運動に対応することはこれまでも見てきた。（この設問のヒント：磁場の中で角運動量を持っている磁気モーメントは磁場方向に倒れず、歳差運動をする。これは重力下で回転しているコマが倒れないで鉛直方向の周りに歳差運動するのと同じ理屈である。）

4. $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$ を示せ。

5. 期待値の時間変化の方程式（(3.7.31) 式 ）

$$\frac{d}{dt} < \hat{M} >_t = -\frac{i}{\hbar} < [\hat{M}, \hat{H}] >_t$$

を使い、次の設問に答えよ。

(1) ハミルトニアンが $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$ で表される時、$\dfrac{d}{dt} < \hat{x} > = \dfrac{1}{m} < \hat{p} >$ を求めよ。

(2) 上の$\hat{H}$に対して、 $[\hat{p}, \hat{H}] = -i\hbar\dfrac{\partial V}{\partial x}$ を示せ。

(3) 上の$\hat{H}$に対して、$\dfrac{d}{dt} < \hat{p} > = -\left\langle \dfrac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$ を示せ。

（これは**Ehrenfestの定理**である（演習2(6)の参考を参照。この演習７の問５の方法では、演習2(6)と異なり、波動関数を使わず示すことができる。））